ESTATÍSTICA I - 2º Ano Gestão Desporto, Exame Época Normal 03. 07. 2020

1hora. (cotação 14 valores)

Questões de resposta aberta

Nome:____**Número:**_____

Espaço reservado para classificações

1a. (15)	2a. (10)	2c. (10)	3a. (10)	4a. (10)	6 a. (10)
1b. (10)	2b. (10)	2d. (10)	3b. (10)	4b. (15)	6 b. (10)
				5. (10)	

Atenção: todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.

1. Dos estudantes inscritos em Estatística no 1º semestre 20% tiveram uma classificação final negativa, 50% obtiveram uma classificação final entre 10 e 15 e os restantes obtiveram uma classificação final igual ou superior a 15. Sabe-se que dos que chumbaram 10% usufruíram da avaliação contínua ao longo do semestre, sendo essa percentagem de 50% para os que tiveram uma nota final positiva mas inferior a 1 e de 80% para os que obtiveram pelo menos 15.

a. Se soubermos que um estudante usufruíu da avaliação continua ao longo do semestre qual a probabilidade de este ter uma classificação final positiva mas inferior a 15 valores?

A_1 –nota negativa; $A_2 - 10 \leq$nota< 15; A_3 –nota ≥ 15 $B -$ usufruir da avaliação contínua

$\{A_1, A_2, A_3\}$ constituem uma partição de Ω

$$P(A_1) = 0.2;\ P(A_2) = 0.5;\ P(A_3) = 0.3; P(B|A_1) = 0.1;\ P(B|A_2) = 0.5; P(B|A_3) = 0.8$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_2) * P(A_2)}{P(B|A_1) * P(A_1) + P(B|A_2) * P(A_2) + P(B|A_3) * P(A_3)}$$

$$= \frac{0.5*0.5}{0.1*0.2+0.5*0.5+0.8*0.3} = 0.4902$$

b. Seleccionados aleatoriamente 10 estudantes qual a probabilidade de pelo menos 6 terem tido uma classificação final entre 10 e 15?

X- ter classificação final entre 10 e 15$\sim B(10, 0.5)$

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - F_X(6^-) = 1 - F_X(5) = 1 - 0.6230 = 0.3770$$

2. Um estudo associa as seguintes variáveis aleatórias:

- X – Consumo de tabaco durante a gravidez ($X = 1$ se mãe fumou durante a gravidez; $X = 0$ no caso contrário);
- Y – Peso do recém-nascido ($Y = 1$ se peso é inferior a 3 kg; $Y = 2$ se o peso está entre 3 kg e 3.5 kg; $Y = 3$ se peso é superior a 3.5 kg).
- Sabe−se ainda que uma mãe não fumadora tem uma probabilidade de 0.125 de ter um filho com peso entre 3 kg e 3.5 kg e que se um recém-nascido tem peso superior a 3.5 kgs a probabilidade de a mãe fumar é de 0.15.

A respectiva função probabilidade conjunta é dada por:

$\boldsymbol{X \setminus Y}$	**1**	**2**	**3**	$\boldsymbol{f_X(x)}$
0	a	0,1	c	0.8
1	0,05	0.12	0.03	0.2
$\boldsymbol{f_Y(y)}$	0.58	0.22	0.2	

Nota: [Se não resolver a alínea a, resolva as alíneas b. e c. considerando $\boldsymbol{a = 0.1\ e\ c = 0.6}$]

a. Preencha o quadro anterior e determine a função distribuição marginal e o valor esperado e a variância da variável X.

$P(Y = 2|X = 0) = 0.125 \Leftrightarrow P(Y = 2|X = 0) = \frac{P(X=0,Y=2)}{P(X=0)} = 0.125$

$\Leftrightarrow P(X = 0) = \dfrac{0.1}{0.125} = 0.8$

$P(X = 1|Y = 3) = 0.15 \Leftrightarrow P(X = 1|Y = 3) = \frac{P(X=1,Y=3)}{P(\ Y=3)} = 0.15$

$\Leftrightarrow P(Y = 3) = \dfrac{0.03}{0.15} = 0.2$

$\boldsymbol{f_Y(3)} = \sum_{x=0}^{1} \boldsymbol{f_{XY}(x,3)} = 0.03 + c = 0.2 \Leftrightarrow c = 0.17$

$\boldsymbol{f_Y(1)} = \sum_{x=0}^{1} \boldsymbol{f_{XY}(x,1)} = a + 0.05 = 0.58 \Leftrightarrow a = 0.53$

$$\boldsymbol{F_X(x)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \boldsymbol{x < 0} \\ \mathbf{0.8} & \boldsymbol{0 \leq x < 1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{x \geq 1} \end{cases}$$

b. Calcule o valor esperado e a variância da variável X.

$E(X) = \sum_{x=0}^{1} x * f_X(x) = 0.2$; $E(X^2) = \sum_{x=0}^{1} \boldsymbol{x^2 * f_X(x) = 0.2}$; $Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = 0.16$

c. Estude a independência das variáveis X e Y.

As variáveis X, Y são independentes sse $\boldsymbol{f_{XY}(x,y) = f_X(x) * f_Y(y)}\ \forall \boldsymbol{(x,y)} \in \boldsymbol{D_{XY}}$

$$\boldsymbol{f_{XY}(1,1) = 0.05\ \neq 0.116 = 0.2 * 0.58 = f_X(1) * f_Y(1)}$$

Ou $\boldsymbol{f_{XY}(1,1) = 0.05\ \neq 0.3 = 0.2 * 0.15 = f_X(1) * f_Y(1)}$

Então, As variáveis X, Y não são independentes

d. Suponha que o peso de um recém-nascido tem uma distribuição normal de média 3 e variância 6.25. Qual a probabilidade do peso do recém-nascido pertencer ao intervalo [1.5, 2.5]?

0.695 ☐ 0. 1464 X 0.063 ☐ 0.1597☐

3. Seja a variável aleatória X com função densidade dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} x+2 & -2 < x < -1 \\ -x & -1 < x < 0 \end{cases}$$

a. Determine a função distribuição.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \int_{-2}^{x} x+2\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{x} = \frac{x^2}{2} + 2x + 2 & -2 \le x < -1 \\ \frac{1}{2} + \int_{-1}^{x} -x\,dx = \frac{1}{2} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{x} = 1 - \frac{x^2}{2} & -1 \le x < 0 \\ 1 & x \ge 0 \end{cases}$$

b. Classifique a variável aleatória. [**Atenção: Justifique devidamente**]

$$\lim_{x\to -2^-} F_X(x) = 0 = \lim_{x\to -2^+} F_X(x) = 0 = F_X(-2)$$

$$\lim_{x\to -1^-} F_X(x) = \frac{1}{2} = \lim_{x\to -2^+} F_X(x) = \frac{1}{2} = F_X(-1)$$

$$\lim_{x\to 0^-} F_X(x) = 1 = \lim_{x\to 0^+} F_X(x) = 1 = F_X(1)$$

Então $F_X(x)$ não tem pontos de descontinuidade, $D_X = \emptyset$ e existe uma função real de variável real $f_X(x)$ tal que $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$, então X é uma v.a. contínua.

4. O número de cheques sem cobertura que um banco recebe por dia (8 horas) segue uma distribuição de Poisson de média 2.

a. Qual a probabilidade de o banco receber menos de um cheque sem cobertura nas primeiras 2 horas de um certo dia.

0.9098 ☐ 0.3033 ☐ 0.3935 ☐ 0.6065 X

b. Qual o número máximo aproximado de cheques sem cobertura recebidos num mês (30 dias) com uma probabilidade de 90%? [Dica: Utilize o Teorema do Limite Central]

$Y = \sum_{i=1}^{30} X_i$ – número de cheques sem cobertura recebidos num mês
$a = ? : P(Y \le a) = 0.9$, aplicando o TLC, com correcção de continuidade porque a variável é discreta, tem-se:

$$P\left(\underbrace{\frac{Y - n*\mu_X}{\sqrt{n*\sigma^2}}}_{\sim N(0,1)} \le \frac{a + \frac{1}{2} - 30*2}{\sqrt{30*2}}\right) = P\left(Z \le \underbrace{\frac{a + \frac{1}{2} - 30*2}{\sqrt{30*2}}}_{z_\varepsilon}\right) = 0.9;\ z_\varepsilon : P(Z > z_\varepsilon) = 0.1 \Rightarrow z_\varepsilon = -1.282$$

$\frac{a + \frac{1}{2} - 30*2}{\sqrt{30*2}} = -1.282 \Leftrightarrow a = 49.57$ então o o número máximo aproximado de cheques sem cobertura recebidos num mês (30 dias) com uma probabilidade de 90% é 50.

5. Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Sejam os acontecimentos $A: X < \frac{\sigma}{2} + \mu$ e $B: X < \frac{3\sigma}{2} + \mu$. Calcule a $P(A \cup B)$.

$$P(A \cup B) = P\left(X < \frac{3\sigma}{2} + \mu\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{3}{2}\right) = P\left(Z < \frac{3}{2}\right) = 0.9332$$

6. A Ana acaba de encomendar uma pizza à Pizza Quente e sabe que em média esta empresa demora 30 minutos a entregar um pedido. Considere que o tempo de entrega de um pedido tem distribuição exponencial.

a) Qual a probabilidade da Ana esperar menos de 25 minutos pela entrega da piza? (*Assinale com uma **cruz** no quadrado adequado*)

0.5654 X 0.4346 ☐ 0.6988 ☐ 0.3012 ☐

b) Qual a mediana do tempo de entrega de um pedido?

$$\mu_e : P(X \leq \mu_e) = 0.5 \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{\mu_e}{30}} = 0.5 \Leftrightarrow ln\left(1 - e^{-\frac{\mu_e}{30}}\right) = \ln(0.5) \Leftrightarrow -\frac{\mu_e}{30} = -0.6931$$

$$\Leftrightarrow \mu_e = 20.7944$$